$\boxed{-23-}$

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^{n} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

N.B.: 1) Qui e nei nostri esercizi, $\log = \ln =$ logaritmo naturale, cioè in base $e \simeq 2,718\ldots$ (NEPERO)

2) Diamo per buono che $\sin \frac{1}{n}$ è positivo per ogni $n \in \mathbb{N}$

3) α è un intero fissato, $\alpha \geq 2$

Innanzi tutto osserviamo che la serie data è a termini positivi. Infatti, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha: $\frac{1}{n} > 0$, $1 + \frac{1}{n} > 1$ e quindi $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log 1 = 0$. Inoltre, la quantità che è dentro la parentesi quadra è strettamente positiva. Infatti, poiché $\alpha \geq 2$, allora $4\alpha \geq 8 > 0$; inoltre, nel termine $(\sin x)^{2\alpha}$, l'esponente è un numero INTERO PARI, e quindi, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $(\sin x)^{2\alpha} \geq 0$; inoltre, $|x|$ è sempre ≥ 0, e quindi $\operatorname{arctg}|x| \geq 0$ (perché in generale $\operatorname{arctg} s \geq 0$ se e solo se $s \geq 0$). Allora $4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x| \geq 4\alpha + 0 + 0 \geq 8$, e quindi è >0, ed anche >1 (ci serve nel seguito). Quindi la serie data è a termini positivi (per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Allora, tenendo conto dei limiti notevoli $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, applichiamo il criterio del CONFRONTO ASINTOTICO (ponendo $x = \frac{1}{n}$, si può fare perché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, quindi x tende a 0) e otteniamo che la nostra serie si comporta come la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} [4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|]^n$, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[4\alpha+(\sin x)^{2\alpha}+\operatorname{arctg}|x|]^n \cdot \frac{\sin\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{[4\alpha+(\sin x)^{2\alpha}+\operatorname{arctg}|x|]^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$=$ (limiti notevoli) $1\cdot 1 = 1$ $(1\neq 0, 1 \neq \pm\infty$ e quindi effettivamente possiamo applicare il criterio del confronto asintotico).

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} [4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|]^n$ è una serie geometrica di ragione $q>1$ (infatti avevamo visto precedentemente, addirittura, che $q = 4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x| \geq 8$) e quindi <u>diverge</u>. Pertanto la serie data <u>diverge</u>.

 9-9-'02

Studiare la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4 \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Innanzi tutto, osserviamo che la serie è a termini positivi e quindi si possono applicare i noti criteri studiati. Per il criterio del confronto asintotico, il termine $\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4$ «somiglia», al tendere di n a +∞, alla quantità $\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^4 = \frac{1}{n^{2/5}}$, in quanto (limite notevole)

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^4 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4}{\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4}{\frac{1}{n^{2/5}}}.$$

Quindi la nostra serie si comporta come se fosse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/5}} \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!}$$ ← A questa serie applichiamo il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(x^8+5x^6+2)^n}} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e pertanto la nostra serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti, $a_n = \frac{1}{n^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!}$, e quindi

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^{n+1}}{(n+1)!}$, e inoltre

$\frac{1}{a_n} = \frac{n^{2/5} \cdot n!}{(x^8+5x^6+2)^n}$. Allora $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}} =$

$$= \frac{(x^8+5x^6+2)^{n+1}}{(n+1)^{2/5} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n^{2/5} \cdot n!}{(x^8+5x^6+2)^n} = \text{(proprietà delle potenze e dei fattoriali)}$$

$$= \frac{\cancel{(x^8+5x^6+2)^n} \cdot (x^8+5x^6+2) \cdot n^{2/5} \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}}{(n+1)^{2/5} \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{(x^8+5x^6+2)^n}} =$$

$(x^8+5x^6+2) \cdot \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{1}{n+1}$. Allora $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} =$

$$= (x^8+5x^6+2) \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}}}_{=1\text{, per il principio di sostituzione degli infiniti}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}}_{=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0} =$$

$= (x^8+5x^6+2) \cdot 1 \cdot 0 = \boxed{0}$

[N.B.: Abbiamo usato il fatto che "la costante moltiplicativa passa dentro e fuori dal segno del limite" e che "il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti".]

SCHEMA MOLTO UTILE PER APPLICARE IL TEST DELL'HESSIANO CON GLI AUTOVALORI SENZA NECESSARIAMENTE RISOLVERE L'EQUAZIONE

det $(A-\lambda I)=0$

Consideriamo l'equazione di secondo grado

det $(A-\lambda I)=0$. Esprimiamola in modo tale che il coefficiente di λ^2 sia positivo, senza perdita di generalità. Per esempio, se viene $-\lambda^2+5\lambda-6=0$, scriveremo l'equazione nella forma $\lambda^2-5\lambda+6=0$. E studiamo i segni dei coefficienti, nell'ordine, più precisamente da quello associato a λ^2 al termine noto, cioè da sinistra a destra.

	Esempio		
+ + +	$\lambda^2+5\lambda+6=0$	Due autovalori negativi	massimo relativo
+ - +	$\lambda^2-5\lambda+6=0$	Due autovalori positivi	minimo relativo
+ + -	$\lambda^2+5\lambda-6=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella
+ - -	$\lambda^2-5\lambda-6=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella
+ + 0	$\lambda^2+4\lambda=0$	Autovalore nullo	non si può dire nulla
+ - 0	$\lambda^2-4\lambda=0$	Autovalore nullo	non si può dire nulla
+ 0 0	$\lambda^2=0$	Due autovalori nulli	non si può dire nulla
+ 0 -	$\lambda^2-9=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella

+ 0 + $\lambda^2+9=0$ NON PUO' MAI ACCADERE NEI NOSTRI ESERCIZI, PERCHÉ SAPPIAMO CHE GLI AUTOVALORI SONO SEMPRE REALI!!!

<u>MOLTO IMPORTANTE</u>: IN UNA SUCCESSIONE DI + E -, PER ESEMPIO + + - OPPURE + - + E COSÌ VIA, LE COPPIE ++ E - - SI CHIAMANO <u>PERMANENZE,</u> LE COPPIE + - E - + SI CHIAMANO <u>VARIAZIONI.</u> Si può vedere (ma NON facciamo la dimostrazione) che A OGNI VARIAZIONE CORRISPONDE UNA RADICE POSITIVA, mentre A OGNI PERMANENZA CORRISPONDE UNA RADICE NEGATIVA. Quindi, per esempio, la successione + - + è costituita dalle coppie + - e - + che sono due variazioni (quindi due radici positive), mentre la successione + + - è costituita dalle coppie + + e + - che sono rispettivamente una permanenza e una variazione (quindi una radice negativa e una positiva).

ESERCIZIO ~~10~~ $\boxed{\text{NEW}}$ - Eserc. ispir.

Data la funzione

$$g(x,y) = \frac{7}{3}x^3 + y^2 - 8xy + 9x^2 + 16x - 4y - 23, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

si chiede di:

a) calcolare le derivate parziali prime e seconde di g;

b) determinare i punti stazionari di g;

c) determinare gli (eventuali) punti di massimo e di minimo relativi e di sella.

a) Si ha: $g_x(x,y) = \frac{7}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 8y + 18x + 16$;

$g_y(x,y) = 2y - 8x - 4$;

$g_{xx}(x,y) = 14x + 18$; $g_{yy}(x,y) = 2$; $g_{xy}(x,y) = -8 = g_{yx}(x,y)$.

b) Imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente $\nabla g(x,y) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x^2 - 8y + 18x + 16 = 0 \\ 2y - 8x - 4 = 0 \end{cases}$

Da $2y - 8x - 4 = 0$ si ottiene $y = 4x + 2$, e sostituendo qui l'espressione di y in funzione di x, abbiamo

$7x^2 - 8(4x+2) + 18x + 16 = 0$ $\quad 7x^2 - 32x \cancel{-16} + 18x \cancel{+16} = 0$

$7x^2 - 14x = 0$ $\quad x^2 - 2x = 0$ $\quad x(x-2) = 0$ Quindi si trova $x = 0$ oppure $x = 2$: nel primo caso $y = 2$, mentre nel secondo caso $y = 4 \cdot 2 + 2 = 10$. Pertanto i punti stazionari sono $P_1 = (0,2)$ e $P_2 = (2,10)$.

c) Consideriamo la matrice Hessiana. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 14x + 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$. Quindi nel punto $P_1 = (0,2)$ si ha

$H(P_1) = H(0,2) = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$, e pertanto $\det(H(P_1)) = 36 - 64 = -28 < 0$. Dunque, P_1 è un punto sella. Nel punto $P_2 = (2,10)$ si ha $H(P_2) = H(2,10) = \begin{bmatrix} 46 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$, e quindi $\det(H(P_2)) = 92 - 64 = 28 > 0$, mentre $g_{xx}(2,10) = 46 > 0$ (ed $g_{yy}(2,10) = 2 > 0$). Per il test dell'Hessiano, P_2 è un punto di minimo relativo.

Alla stessa conclusione si perviene se consideriamo gli autovalori della matrice Hessiana.

$H(P_1) = H(0,2) = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di $H(P_1)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H(P_1) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 18-\lambda & -8 \\ -8 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$

$= (18-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 20\lambda + 36 - 64 = \lambda^2 - 20\lambda - 28$

Il trinomio $\lambda^2 - 20\lambda - 28$ ammette una variazione e una permanenza (del segno dei coefficienti). La variazione si ha quando si passa dal coefficiente 1 al coefficiente -20, mentre la permanenza c'è quando si passa dal coefficiente -20 al coefficiente -28. Alla variazione (o cambiamento di segno) corrisponde una radice positiva dell'equazione considerata (cioè, nel nostro caso, un autovalore positivo), mentre alla permanenza (o mantenimento del segno) corrisponde una radice negativa dell'equazione considerata (cioè, nel nostro caso, un autovalore negativo). Quindi, abbiamo un autovalore positivo e un autovalore negativo, e pertanto si riottiene che P_1 è un punto sella.

Si ha inoltre: $H(P_2) = H(2,10) = \begin{bmatrix} 46 & -8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di $H(P_2)$ sono le radici λ dell'equazione $0 = \det(H(P_2) - \lambda I) =$

$= \det \begin{bmatrix} 46-\lambda & -8 \\ -8 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (46-\lambda)(2-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 48\lambda + 92 - 64 =$

$= \lambda^2 - 48\lambda + 28$. Procedendo come al passo precedente, notiamo che questo trinomio ammette due variazioni, e quindi due radici <u>reali</u> positive (le radici devono essere necessariamente reali, in quanto $H(P_2)$ è simmetrica). Da ciò, per il test dell'Hessiano con gli autovalori, si deduce che P_2 è un punto di minimo relativo, essendo gli autovalori di $H(P_2)$ TUTTI E DUE POSITIVI.